Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

Année: 2010 - 2011
Gr1 : S1

Module d'Algèbre I
Série N° : 3

Exercice 1. Etudier les lois de coposition internes $\oplus$ et $\otimes$ définies sur $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$ par: $\overline{p} \oplus \overline{q} = \overline{p+q}$ et $\overline{p} \otimes \overline{q} = \overline{p \times q}$, $\forall \ \overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{E} =]-1, 1[$ les lois de composition interne suivantes:

$i)$ $\forall a, b \in \mathbb{E}$ $\qquad a * b = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$,

$ii)$ $\forall a, b \in \mathbb{E}$ $\qquad a * b = \frac{a+b}{1+ab}$.

$(\mathbb{E}, *)$ est-il un groupe?

Exercice 3. Soit $(G, *)$ un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément e tel que: $\forall a \in G \ \ e * a = a$ et $\forall a \in G \ \ \exists a' \in G \ \ a' * a = e$. Montrer alors que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 4. Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre 1 tel que: $(ab)^2 = a^2b^2$ pour tous a, b dans G. Montrer que G est commutatif.

Exercice 5. Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle:

1) **Centralisateur** de $a \in G$, l'ensemble: $Z_a = \{b \in G \mid a * b = b * a\}$,

2) **Centre (ou commutateur)** de G, l'ensemble: $Z(G) = \{a \in G \mid \forall b \in G \ a * b = b * a\}$.

Montrer Z_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes de G.

Exercice 6. Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe multiplicatif G. On définit le sous-ensemble HK de G par: $HK = \{ab \mid (a, b) \in H \times K\}$. Montrer que HK est un sous-groupe de G si, et seulement si, $HK = KH$.

Exercice 7. Soit $f : x \rightarrow e^{ix}$, montrer que f est un homomorphisme du $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Calculer son noyau et son image. f est-elle injective?

Exercice 8. Soit $(\mathbb{G}, \cdot)$ un groupe. Montrer que les applications $f : x \rightarrow x^{-1}$ et $g : x \rightarrow x^{2} = x.x$, sont des morphismes de groupes si, et seulement si $\mathbb{G}$ est abélien.

Exercice 9. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une bijection. On définit sur E une loi de composition interne $*$ par: $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$. Montrer que $(E, *)$ est un groupe abelien. Quelle est la nature de f?

Exercice 10. Soit $(A, +, .)$ un anneau unitaire.
1) Montrer que si a et b commutent dans A, on a alors pour tout entier naturel n:

i) $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (formule du binme de Newton).

ii) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k}$.

2) On dit que $x \in A$ est **nilpotent** si $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Montrer que si x est nilpotent alors $(1-x)$ est inversible.
3) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors xy et $x+y$ sont nilpotents.
4) Un corps admet-il des éléments nilpotents?

Exercice 11. On appelle nombre décimal tout nombre rationnel de la forme $\frac{a}{10^m}$ où a est un entier relatif et m un entier naturel. Montrer que l'ensemble:

1) D des nombres décimaux est un anneau unitaire, commutatif et intègre.

2) $U(D)$ des unités de D est: $U(D) = \{r = \pm 2^\alpha 5^\beta \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Exercice 12. Montrer que tout anneau unitaire intègre et fini est un corps.

Exercice 13.

1) Montrer que:$(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe abélien où : $x \oplus y = x + y + 1$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

2) Soit $f : (\mathbb{R}, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$,telle que $f(x) = 2x + 1$. Montrer que f est un automorphisme de $(\mathbb{R}, \oplus)$.

3) On définit dans $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $\otimes$ par: $x \otimes y = x + y + xy$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercice 14. Soit p un entier sans facteurs carrés dans sa décomposition en produit de nombres premiers (cest-à-dire que $p = \prod_{k=1}^{r} p_k$ où les p_k sont premiers deux à deux distincts). Montrer que lensemble:

i) $\mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{n + m\sqrt{p} \ \mid \ (n, m) \ \in \mathbb{Z}^2\}$, est un sous anneau de $\mathbb{R}$.

ii) $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \ \mid \ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous corps de $\mathbb{R}$.